



Envolvente Convexa para determinar puntos terminales en Problemas de Enrutamiento de Vehículos Capacitados

Sánchez-Carmona, M.A.; Loza-Hernández, L.

Información del Artículo	Resumen
Recibido: 6-nov-2024 Aceptado: 17-dic-2024	Se propone el uso de una <i>envolvente convexa</i> aplicado a cuatro diferentes escenarios para determinar el subconjunto de puntos más alejados y establecerlos como puntos <i>terminales</i> , con el fin de alimentar un modelo de programación lineal entera. Cada escenario esta conformado por un conjunto de puntos distintos con coordenadas geográficas y un punto de destino denominado <i>depósito</i> . El modelo propuesto toma de referencia los aspectos más relevantes del Problema de Enrutamiento de Vehículos para generar el conjunto rutas de transporte hacia un depósito para cada escenario. Las rutas obtenidas con este modelo y el uso de la envolvente convexa, para la determinación del subconjunto de vértices terminales, obtienen rutas óptimas dirigidas hacia el depósito en tiempos computacionales cortos.
Palabras clave: envolvente convexa, rutas, enrutamiento de vehículos	

1. Introducción

El Problema de Enrutamiento de Vehículos (VRP, por sus siglas en inglés), es conocido por ser uno de los problemas combinatorios con una gran variedad de aplicaciones en diversas áreas [1], el cual consiste en determinar rutas óptimas para un conjunto de vehículos que deben atender una serie de clientes desde un depósito, minimizando costos como distancias o tiempos [2], [3]. Se sabe que el VRP tiene sus orígenes en el clásico Problema del Agente Viajero (TSP, por sus siglas en inglés), en el cual un vendedor debe visitar un conjunto de ciudades (puntos) y regresar a la ciudad de partida; existe un costo de viaje desde una ciudad i a una ciudad j , el objetivo es visitar cada ciudad una sola vez, minimizando el costo total del viaje [3]. El TSP tienen distintas variaciones, en [2] se hace mención del denominado Problema del Agente Viajero Múltiple (mTSP), donde la formulación del problema implica tener varios vendedores que parten de un mismo punto y retornar a este, cada vendedor debe visitar distintas ciudades sin que ninguno pase por una ya visitada, por lo que la solución al problema consiste de m rutas.

Partiendo del TSP y del mTSP, el VRP se enfoca en la determinación del conjunto óptimo de rutas que debe realizar un grupo de vehículos para atender a un conjunto determinado de clientes. Es uno de los problemas de optimización combinatoria más importantes y estudiados por más de 60 años, donde su importancia e interés se debe a su relevancia práctica, así como por su dificultad [2], [4].

La envolvente convexa (convex hull), en términos referentes a teoría de gráficas [5], permite identificar la mínima cantidad de vértices que pueden encerrar al resto de ellos, sus aplicaciones en dicho campo son notorios, y bajo este concepto es factible su aplicación en el área del VRP.

El objetivo de este trabajo, es implementar una envolvente convexa al conjunto de datos geográficos en cada escenario para determinar el subconjunto de puntos en donde rutas de transporte pueden iniciar o finalizar. Esto beneficia a un modelo de VRP que determina rutas en un sentido (rutas de ida o regreso), ya que la complejidad del modelo se reduce y por ello resolverlo con métodos exactos se puede realizar en tiempos computacionales cortos.

El presente documento se estructura de la siguiente manera: en *Trabajos relacionados*, se muestran implementaciones de la envolvente convexa al contexto del VRP; en *Formulación del problema* se detalla el funcionamiento y características del VRP, la envolvente convexa, así como algunos algoritmos para obtenerla; en *Implementación de la Envolvente Convexa a un caso de CVRP* se describe la estructura de los datos usados, el método usado para calcular la envolvente convexa y el modelo matemático propuesto para determinar las rutas de transporte; en la sección *Experimentación* se menciona el comportamiento de los datos y las herramientas utilizadas para lograr el objetivo descrito; en *Resultados* se muestran las rutas y las valoraciones obtenidas para cada escenario; y finalmente en *Conclusiones* se redactan los hallazgos obtenidos en este trabajo.

2. Trabajos relacionados

El uso de la envolvente convexa en el tema del VRP no es muy amplio, la mayoría de trabajos la utilizan como una técnica para valorar la calidad de la solución, S. S. Néia et al. [1] proponen una sugerencia para valorar la calidad de las rutas obtenidas en un VRP, mediante un análisis geométrico utilizando una envolvente convexa para la determinación del tamaño de un área propuesta; por otro lado, B. Kallehauge [6] da un revisión de algoritmos exactos aplicados a una variante del VRP con ventanas de tiempo, conocido como VRPTW, en donde se detalla la relación del VRP con el TSP mediante algunos métodos exactos, como la relajación Lagrangiana que utiliza una envolvente convexa de los vectores de incidencia de soluciones. T.K. Ralphs et al. [7] describen los aspectos más relevante del algoritmo *branch and cut*, ya que diseñan subrutinas para separar efectivamente un punto fraccionario dada la envolvente convexa. J. M. Belenguer et al. [8] consideraron una versión de un VRP denominado Problema de Rutas de Vehículos de Entrega Dividida (SDVRP, por sus siglas en inglés), donde definieron una solución factible al problema mediante una envolvente convexa de los vectores de incidencia asociados. Hao Tang et al. [9] propusieron un método heurístico interactivo para resolver un VRP, donde detallan la importancia del aspecto visual de las rutas en aplicaciones prácticas de transporte de carga, evitando cruces y siendo compactos; la envolvente convexa la utilizaron como una métri-

ca para valorar la calidad de las soluciones determinadas por su método heurístico. Mir Mohammad et al. [10] desarrollaron un método heurístico de búsqueda local, basado en la inserción más cercana de construcción de la envolvente convexa para un TSP, denominado método de inserción más cercano en la búsqueda local de envolvente convexa (NICH-LS). Como se muestra en los trabajos mencionados el uso de metodologías permite determinar los espacios de solución y parámetros iniciales de búsqueda en distintas variaciones de la aplicación del VRP, por ello este artículo muestra una aplicación más de la combinación de la envolvente convexa y el VRP para determinar un conjunto de rutas generadas desde puntos ubicados en el contorno de un área hasta un depósito central, pasando por varios paradas a una distancia mínima.

3. Formulación del problema

La mayoría de implementaciones relacionadas al VRP son resueltas por métodos aproximados [9], [11], [12], lo que lleva a generar soluciones “buenas”, sin embargo, no son las soluciones óptimas que puede arrojar un método exacto [6] al resolver modelos matemáticos de VRP. En las siguientes secciones se relatan los elementos asociados al VRP, los modelos de Programación Lineal Entera (ILP, por sus siglas en inglés), así como de la aplicación de una envolvente convexa para determinar rutas óptimas para cuatro destinos distintos, que se interpretan como diferentes escenarios para este trabajo.

Problema de Enrutamiento de Vehículos

Como se ha mencionado, el VRP consiste en la obtención de rutas siguiendo una serie de restricciones de transporte, algunas de las cuales pueden ser genéricas, como el de iniciar desde un punto específico (depósito) y retornar al mismo como en algunos otros casos atender una serie de peticiones de transporte como pasar por ciertos puntos o atender demandas [2]. La representación de un VRP se suele dar mediante gráficas, teniendo un conjunto de vértices (nodos) y de aristas (arcos) que conectan dichos vértices, ver Figura 1. Dada su complejidad computacional existen una gran variedad de métodos tanto exactos como aproximados para resolver un VRP, así como alguna de sus variaciones [2], [12], [13]; sin embargo los métodos exactos conllevan un mayor costo computacional por lo que se suele preferir el uso de heurísticas o metaheurísticas [14] para la determinación de una solución.

Una variación más conocida del VRP es aquella que considera una capacidad C , el cual es utilizado principalmente para el transporte de carga [7], ya que en cada vértice se tiene un suministro o demanda; este tipo de VRP recibe la denominación de Problema de Enrutamiento de Vehículos Capacitados (CVRP, por sus siglas en inglés) y su objetivo es obtener rutas óptimas sin romper restricciones relacionadas a no rebasar la capacidad de los vehículos [2].

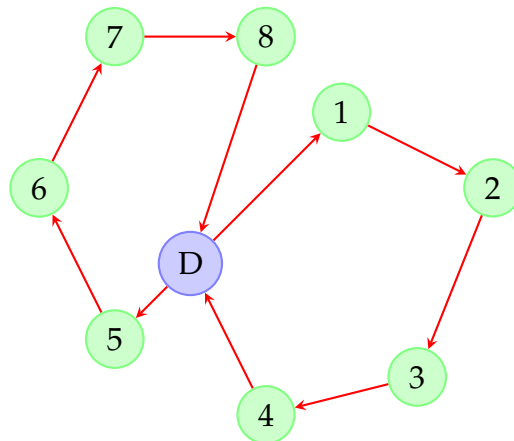


Figura 1: Ejemplo de rutas trazadas en un VRP

Para un VRP o alguna de sus variaciones, la definición de un modelo matemático que determine su comportamiento, tomando en cuenta consideraciones de transporte, son un punto clave para la obtención de las rutas que dan solución al modelo. Este modelo suele ser formulado mediante Programación Lineal Entera (ILP, por sus siglas en inglés) la cual es una extensión de la programación lineal (LP), en la que se imponen restricciones adicionales a las variables de decisión las cuales deben tomar valores enteros en lugar de valores continuos, por lo que busca resolver problemas de optimización donde las soluciones deben ser enteras [15].

En problemas donde las variables representan cantidades discretas o indivisibles, como en la planificación de la producción, asignación de recursos, diseño de redes, entre otros, la ILP se utiliza para encontrar la mejor solución posible que satisfaga todas las restricciones dadas, mientras se maximiza o minimiza una función objetivo [15]. En la Figura 2, se muestra el modelo de ILP para un CVRP, donde la Ecuación (1) establece una función objetivo que busca el costo mínimo c_{ij} mediante la variable de decisión binaria x_{ij} , que toma el valor de 1 si la arista (i, j) es usada o 0 en caso contrario; las restricciones expresadas en las Ecuaciones (2) y (3) establecen que haya una arista de entrada y una de salida respectivamente para todos los vértices con excepción el vértice $\{0\}$ (identificado como depósito); las restricciones expresadas en las Ecuaciones (4) y (5) determinan que haya K aristas salientes y entrantes al vértice $\{0\}$, es decir, que al depósito lleguen K rutas; las Ecuaciones 6 y 7 se encarga de evitar la formación de subciclos y de establecer las restricciones de la carga acumulada mediante una variable auxiliar u_i y una demanda d_i en cada vértice; el rango de las variables se definen en las Ecuaciones(8) y (9).

Envolverte Convexa

La envolverte convexa (convex hull) de un conjunto de puntos, se define como el polígono *convexo* más pequeño. Un conjunto A es convexo si junto con dos puntos cualesquiera

Función objetivo:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in V \setminus \{0\} \quad (2)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V} x_{i0} = K, \quad (4)$$

$$\sum_{j \in V} x_{0j} = K, \quad (5)$$

$$u_i - u_j + C * x_{ij} \leq C - d_j \quad \forall i, j \in V \setminus \{0\}, i \neq j, \text{ tal que } d_i + d_j \leq C \quad (6)$$

$$d_i \leq u_i \leq C, \quad i \in V \setminus \{0\} \quad (7)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V \quad (8)$$

$$u_i \geq 0, \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (9)$$

Figura 2: Modelo de ILP para un CVRP

p, q este contienen el segmento $s = [p, q]$, que contiene a todos los puntos del conjunto [16]; por lo que la envolvente convexa, en términos geométricos, es como “envolver” un conjunto de puntos en una “membrana elástica” que se ajusta alrededor de ellos, de tal forma que cualquier línea que conecte dos puntos dentro de la envolvente también se encuentra dentro de esta [17].

Existen varios algoritmos comunes para calcular la envolvente convexa, entre ellos:

- Algoritmo de Graham (Graham scan): Ordena los puntos por el ángulo polar respecto a un punto base y, usando un recorrido de lista, identifica los puntos que pertenecen a la envolvente convexa.
- Algoritmo de Jarvis (Gift wrapping): También conocido como “envoltura de regalo”, este algoritmo selecciona puntos sucesivos del convex hull hasta cerrar el polígono.
- Algoritmo de Quickhull: Similar al algoritmo de búsqueda QuickSort [18], que implementa la estrategia “divide y conquista”, para encontrar los puntos extremos en el espacio.

En la Ecuación (10) se muestra la expresión de la envolvente convexa $Conv$ para un conjunto de puntos X , donde dado k puntos $x_1, x_2, \dots, x_k$ y teniendo los coeficientes convexos

α_i , su envolvente convexa se define como:

$$\text{Conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \mid x_i \in X, \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\} \quad (10)$$

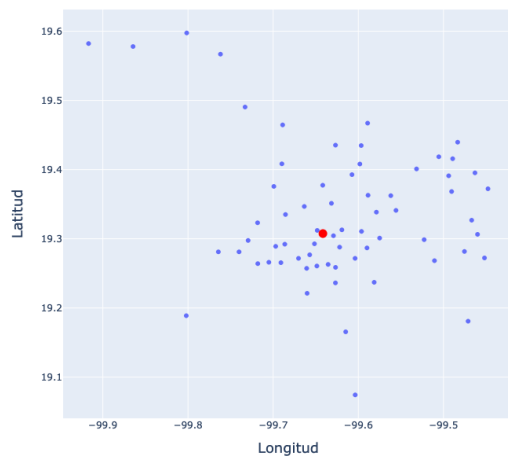
4. Implementación de la Envolvente Convexa a un caso de CVRP

La integración de la envolvente convexa al VRP se realizó mediante la aplicación de dicho método a cuatro conjunto de datos, cada uno con un destino distinto (escenarios). En las siguientes secciones se describe la estructura de los datos, así como el método para obtener la envolvente convexa y su uso para el moldeo de ILP propuesto para los cuatro escenarios.

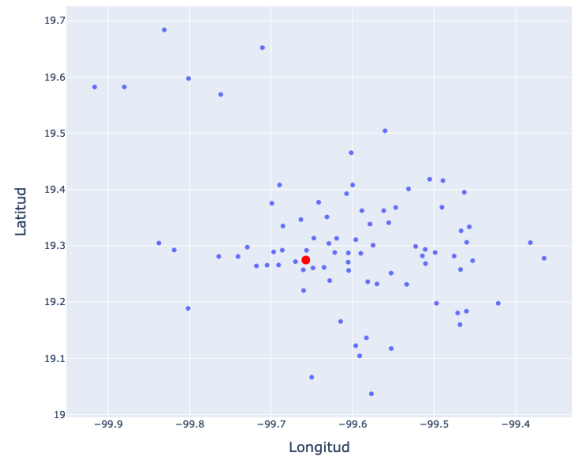
Descripción de los datos

Los datos utilizados se componen de cuatro conjunto de datos separados, en formato CSV (comma-separated values), nombrados: data1.csv, data2.csv, data3.csv y data4.csv. Los datos se construyeron con ubicaciones geográficas de la distribución de población en el Valle de Toluca, mediante uso de Códigos Postales de México [19]. Estos conjuntos de datos mantienen la misma estructura, teniendo los campos: LONGITUD, LATITUD y VOLUMEN, que representan la coordenada en x , y y la cantidad de elementos en cada punto, respectivamente. En cada conjunto de datos se estableció un depósito, siendo este el primer registro del conjunto de datos, en donde las rutas obtenidas deben converger hacia este punto; este elemento se determinó tomándolo como el punto central en cada conjunto de datos.

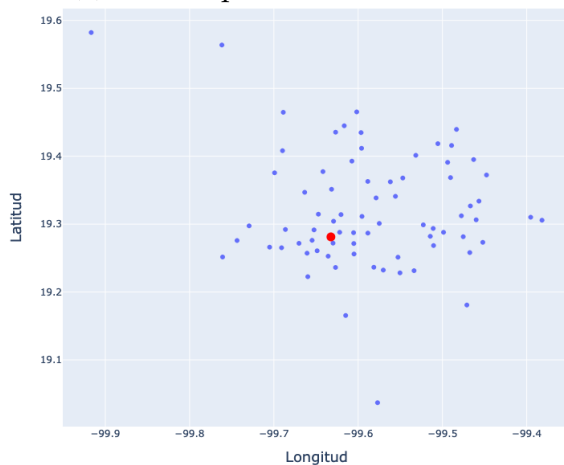
Cada uno de los conjuntos de datos graficados sobre un plano cartesiano, se muestran en la Figura 3, para cada uno la cantidad de puntos es variada; en la Figura 3a se tienen 63 vértices (contando el destino) para el escenario 1, de igual manera en la Figura 3b se tienen 80 vértices para el escenario 2, en la Figura 3c 70 vértices para el escenario 3 y finalmente para escenario 4 en la Figura 3d se tienen 22 vértices.



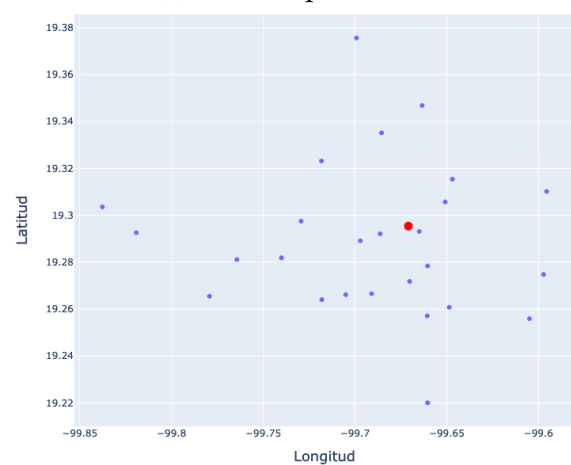
(a) Vértices para el destino 1



(b) Vértices para el destino 2



(c) Vértices para el destino 3



(d) Vértices para el destino 4

Figura 3: Conjunto de vértices para cada de los escenarios (destinos)

Aplicación de la Envolverte Convexa

La aplicación de la envolverte, se realizó mediante el método *QuickHull* [20], el cual es un método para calcular la envolverte convexa para un conjunto finito de puntos, lo cual es ideal para los escenarios propuestos, su utilidad se debe a que emplea técnicas basadas en la estrategia divide y vencerás. La complejidad de este método para el peor de los casos se establece como $O(n^2)$, pero su complejidad promedio se estipula como $\theta(n \cdot \log(n))$ [20].

Para el caso de dos dimensiones, el método de *QuickHull* realiza los siguientes pasos :

1. Se busca un par de puntos óptimos, generalmente los puntos con menor y mayor coordenada X, ya que estos siempre forman parte del cierre convexo.
2. Utilizar la línea entre ambos puntos para dividir el conjunto en dos subconjuntos que serán procesados de forma recursiva.

3. Determinar el punto situado a mayor distancia de la línea anterior y junto a los dos puntos anteriores formar un triángulo.
4. Todos los puntos situados en el interior del triángulo pueden ser descartados, ya que no formarán parte de la envolvente convexa.
5. Repetir los dos pasos anteriores en los dos lados del triángulo (no en el lado inicial).
6. Repetir hasta que no queden puntos sin clasificar; los puntos seleccionados forman la envolvente convexa.

Modelo de ILP propuesto

Siendo $G(V, A)$ una gráfica completa, con V como el conjunto de vértices y A siendo conjunto de aristas; del conjunto V se tienen tres tipos de vértices $\{0\}$, S y F de tal manera que $V = \{0\} \cup S \cup F$; donde el vértice $\{0\}$ representa al depósito, S al subconjunto de vértices denominados *paradas* y F siendo el subconjunto de vértices denominados *terminales*.

Se considera que para cada vértice $i \in F$ se inicia una ruta y en el vértice $\{0\}$ inciden la totalidad de las rutas. En cada vértice $i \in V$ hay una demanda b_i de tal manera que en cada ruta la suma de la demandas de cada uno de sus vértices no debe exceder una capacidad C . El modelo matemático de ILP se muestra a continuación:

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ij} \quad (11)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (12)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ji} = 0, \quad \forall i \in F \quad (13)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0\}} x_{ji} = 1, \quad \forall i \in S \quad (14)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0\}} x_{0j} = 0 \quad (15)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{0\}} x_{i0} = |F| \quad (16)$$

$$x_{ii} = 0, \quad \forall i \in V \quad (17)$$

$$u_i - u_j + C * x_{ij} \leq C - b_j \quad \forall i, j \in V \quad (18)$$

$$b_i \leq u_i \leq C, \quad \forall i \in V \quad (19)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V \quad (20)$$

$$u_i \geq 0, \quad \forall i \in V, \quad (21)$$

La Ecuación (11) establece la función objetivo que busca las rutas con menor distancia; la Ecuación (12) determina que haya una sola arista que salga de todos los vértices sin considerar al depósito; la Ecuación (13) establece que para todos los vértices terminales, no haya ninguna arista entrante desde otro vértice; la Ecuación (14) señala que haya una sola arista de entrada para todos los vértices de tipo *parada* desde cualquier otro nodo sin considerar el depósito; las Ecuaciones (15) y (16) determinan la cantidad de aristas de salida y entrada para el depósito hacia los otros vértices, se señala que al depósito deben incidir tantas aristas igual el tamaño del conjunto F ; la Ecuación (17) evita la generación de ciclos entre vértices iguales; las Ecuaciones (18) y (19) evitan la formación de subciclos y modelan la carga acumulada de pasajeros; la variable de decisión x_{ij} se define en (20), así como la variable auxiliar u_i definida en (21) para modelar la carga acumulada y las demandas b_i en cada vértice i .

5. Experimentación

La implementación de la envolvente convexa con el método QuickHull se realizó mediante la biblioteca *scipy.spatial* del lenguaje Python [21], [22]. Para cada uno de los escenarios descritos anteriormente se aplicó dicho método, en las gráficas de la Figura 4 se observan los puntos detectados para formar la envolvente convexa; para el destino 1 se obtuvieron 8 puntos que conforman la envolvente convexa, ver Figura 4a, para el destino 2, en la Figura 4b se determinaron 11 puntos que conforman su envolvente convexa y para los destinos 3 y 4 en las Figuras 4c y 4d se encontraron 7 puntos. La aplicación de la envolvente convexa para cada escenario presentado encontró el subconjunto de vértices *terminales*, estos vértices fueron etiquetados con un valor numérico de 2, el depósito fue etiquetado con un valor de 0 y el resto de vértices se les asignó un valor de 1. Este etiquetado se almacenó en la estructura de datos de los archivos CSV en un nuevo campo denominado *TIPO*, con la finalidad de servir como una categoría para determinar los subconjuntos de datos para el modelo de ILP, denominados *depósito*, *paradas* y *terminales*.

Para el modelo de ILP propuesto, se estableció la capacidad de cada ruta mediante el parámetro C , establecido en 600 para cada escenario; este valor se utiliza en las Ecuaciones (18) y (19), con el fin de establecer un límite de capacidad que no deben rebasar las rutas obtenidas en cada escenario.

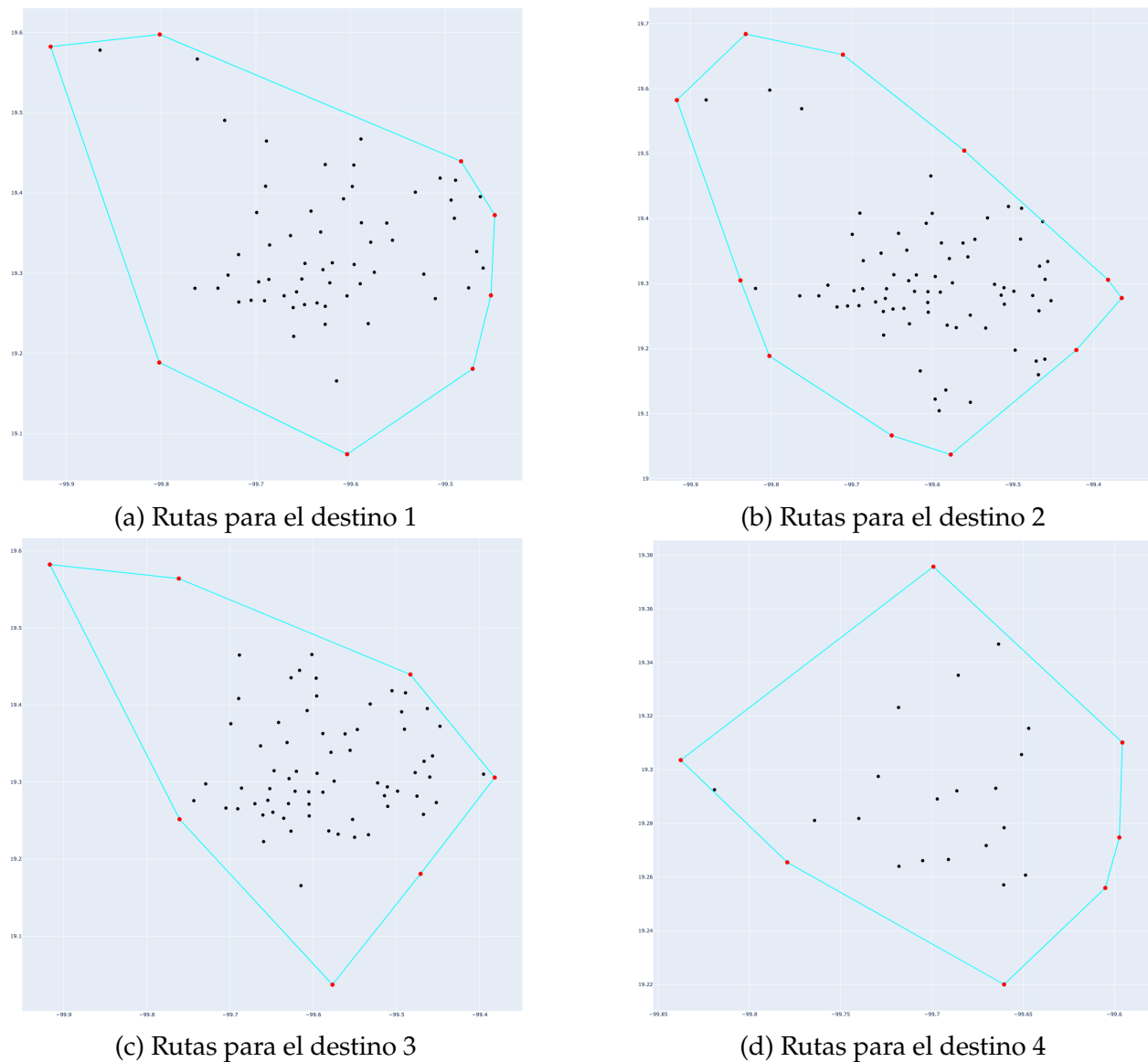
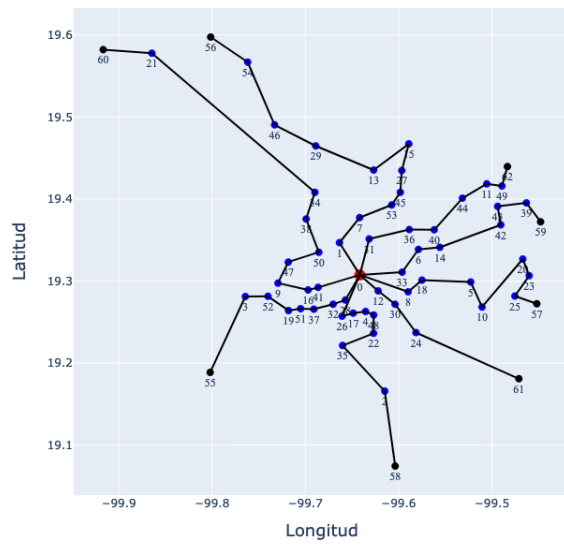


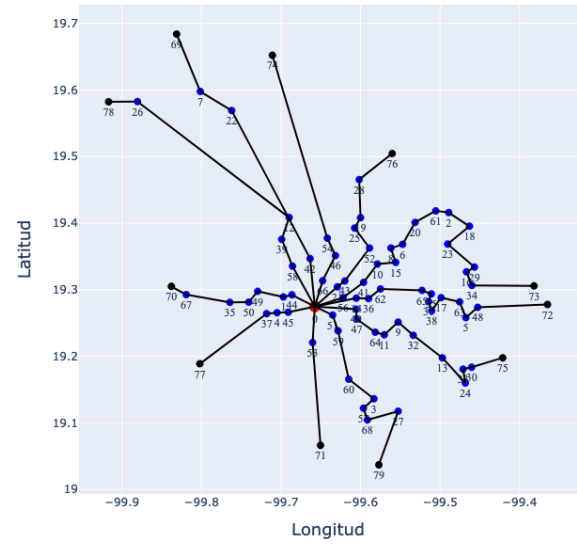
Figura 4: Rutas obtenidas con el modelo de ILP

6. Resultados

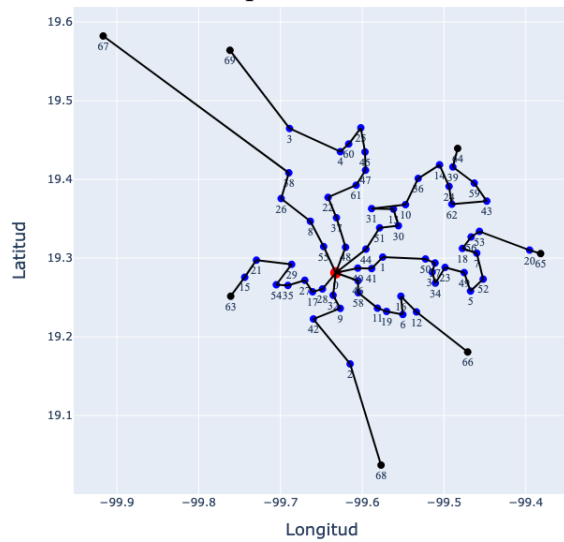
Mediante el método Quickhull para obtener la envolvente convexa y determinar el subconjunto de puntos *terminales* para cada escenario, y posteriormente alimentar el modelo de ILP propuesto; se obtuvieron las rutas mostradas en las gráficas de la Figura 5. En el escenario 1 de la Figura 5a se obtuvieron 8 rutas que inician desde las terminales para dirigirse al depósito; este escenario utilizó un total de 63 vértices. Para el conjunto de puntos del escenario 2, en la Figura 5b se observa que se determinaron 11 rutas utilizando 80 vértices. En la Figuras 5c y 5d para los escenarios 3 y 4 respectivamente, el modelo determinó un total de 7 rutas para ambos casos.



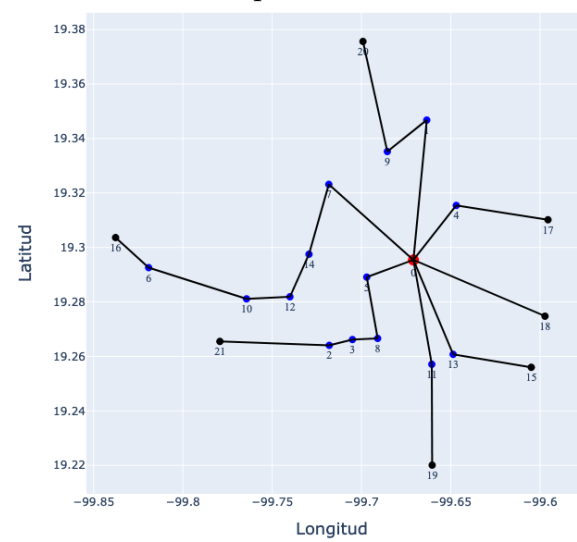
(a) Rutas para el destino 1



(b) Rutas para el destino 2



(c) Rutas para el destino 3



(d) Rutas para el destino 4

Figura 5: Rutas obtenidas con el modelo de ILP

En la Tabla 1 se muestran los valores obtenidos de la función objetivo, el número de terminales establecidas por la envolverte convexa, el total de vértices y el tiempo de ejecución requerido para resolver el modelo para cada uno de los cuatro destinos establecidos.

Tabla 1: Resultados de las métricas para valorar la calidad de los clusters

Des- tino	Función Objetivo	Num. ter- minales	Total de vértices	Tiempo de ejecución (seg)
1	2.54	8	63	8.836
2	3.59	11	80	6.704
3	2.46	7	70	7.459
4	0.76	7	22	0.7285

Con los resultados obtenidos podemos señalar que la envolvente convexa para establecer un subconjunto de puntos de inicio o fin de ruta facilita el modelo de ILP, por lo que la solución a este mediante métodos exactos se realiza en tiempos computacionales cortos. Por otro lado observamos que entre más puntos tenga el conjunto de datos, mayor será el tiempo para obtener la solución óptima del modelo

7. Conclusiones

Un método de envolvente convexa aplicado al tema del VRP, permitió determinar el subconjunto de puntos terminales de manera eficiente, por lo que para un modelo de ILP, donde se desea buscar rutas óptimas que inicien desde alguno de los vértices terminales y que incidan a los vértices del subconjunto de puntos intermedios (paradas) para finalizar en el depósito o en caso contrario, inicien desde el depósito incidan por el subconjunto de paradas y finalicen en alguno de los elementos del subconjunto de terminales, permite reducir los tiempos computacionales, así como la determinación de las rutas.

Utilizar una envolvente convexa cuando no se ha establecido un conjunto de puntos específicos de inicios de rutas de transporte, permite determinarlos eficientemente; por lo que aplicar este método previo a resolver un modelo mediante métodos exactos, reduce el espacio de búsqueda de soluciones, lo que implica que los tiempos computacionales para obtener una solución óptima se ven minimizados, por lo que esta metodología se recomienda implementar en el área de transporte de carga o de pasajeros, para situaciones donde se busca encontrar rutas en un solo sentido.

Direcciones de correo de los autores

SÁNCHEZ-CARMONA, M.A.: msanchezc048@alumno.uaemex.mx

LOZA-HERNÁNDEZ, L.: llozahe@gmail.com

Referencias

- [1] S. S. Néia, A. O. Artero y C. B. D. Cunha, «QUALITY ANALYSIS FOR THE VRP SOLUTIONS USING COMPUTER VISION TECHNIQUES,» en, *Pesquisa Operacional*, vol. 37, n.º 2, págs. 387-402, ago. de 2017, issn: 0101-7438. doi: 10.1590/0101-7438.2017.037.02.0387. visitado 21 de nov. de 2024. dirección: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-74382017000200387&lng=en&tlng=en.
- [2] P. Toth y D. Vigo, eds., *The vehicle routing problem* (SIAM monographs on discrete mathematics and applications), en. Philadelphia, Pa: Society for Industrial y Applied Mathematics, 2002, isbn: 978-0-89871-579-8 978-0-89871-498-2.
- [3] R. D. Carr y N. Simonetti, *A New Integer Programming Formulation of the Graphical Traveling Salesman Problem*, 8 de jun. de 2020. visitado 15 de ago. de 2023. dirección: <http://arxiv.org/abs/2006.04933>.
- [4] G. B. Dantzig y J. H. Ramser, «The Truck Dispatching Problem,» en, *Management Science*, vol. 6, n.º 1, págs. 80-91, 1959. dirección: <http://www.jstor.org/stable/2627477>.
- [5] J. A. Bondy y U. S. R. Murty, *Graph Theory* (Graduate Texts in Mathematics), en. London: Springer London, 2008, vol. 244, isbn: 978-1-84628-969-9 978-1-84628-970-5. doi: 10.1007/978-1-84628-970-5. visitado 8 de abr. de 2024. dirección: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-84628-970-5>.
- [6] B. Kallehauge, «Formulations and exact algorithms for the vehicle routing problem with time windows,» en, *Computers & Operations Research*, vol. 35, n.º 7, págs. 2307-2330, jul. de 2008, issn: 03050548. doi: 10.1016/j.cor.2006.11.006. visitado 21 de nov. de 2024. dirección: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0305054806002929>.
- [7] T. Ralphs, L. Kopman, W. Pulleyblank y L. Trotter, «On the capacitated vehicle routing problem,» en, *Mathematical Programming*, vol. 94, n.º 2-3, págs. 343-359, ene. de 2003, issn: 0025-5610, 1436-4646. doi: 10.1007/s10107-002-0323-0. visitado 21 de nov. de 2024. dirección: <http://link.springer.com/10.1007/s10107-002-0323-0>.
- [8] J. M. Belenguer, M. C. Martinez y E. Mota, «A Lower Bound for the Split Delivery Vehicle Routing Problem,» en, *Operations Research*, vol. 48, n.º 5, págs. 801-810, oct. de 2000, issn: 0030-364X, 1526-5463. doi: 10.1287/opre.48.5.801.12407. visitado 21 de nov. de 2024. dirección: <https://pubsonline.informs.org/doi/10.1287/opre.48.5.801.12407>.
- [9] H. Tang y E. Miller-Hooks, «Interactive Heuristic for Practical Vehicle Routing Problem with Solution Shape Constraints,» en, *Transportation Research Record*, vol. 1964, n.º 1, págs. 9-18, 2006. doi: 10.1177/0361198106196400102.

- [10] M. M. Alipour y S. N. Razavi, «A new local search heuristic based on nearest insertion into the convex hull for solving Euclidean TSP,» en, *International Journal of Operational Research*, vol. 34, págs. 409-429, 2019, ISSN: 1745-7645, 1745-7653. DOI: 10.1504/IJOR.2019.10019739.
- [11] B. Muralidharan, S. Eswaran y R. S P, «A survey of vehicle routing problem and its solutions using bio-inspired algorithms,» *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 118, págs. 259-264, 1 de ene. de 2018.
- [12] L. Ruisong y W. Ning, «Data-Driven Bus Route Optimization Algorithm Under Sudden Interruption of Public Transport,» *IEEE Access*, vol. 10, págs. 5250-5263, 2022, doi:10.1109/ACCESS.2022.3140947. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3140947.
- [13] C. S. W. y K. M. R., «Optimisation of vehicle routing problem with time windows using Harris Hawks optimiser,» *Journal of Mechanical Engineering and Sciences*, vol. 16, n.º 39, págs. 9056-9065, 2022, doi:10.15282/jmes.16.3.2022.08.0717. DOI: 10.15282/jmes.16.3.2022.08.0717.
- [14] B. Chopard y M. Tomassini, *An Introduction to Metaheuristics for Optimization* (Natural Computing Series), en. Cham: Springer International Publishing, 2018, ISBN: 978-3-319-93072-5 978-3-319-93073-2. DOI: 10.1007/978-3-319-93073-2. visitado 21 de mar. de 2024. dirección: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-93073-2>.
- [15] J. Nocedal y S. J. Wright, *Numerical optimization* (Springer series in operation research and financial engineering), Second. New York, NY: Springer, 2006, ISBN: 978-0-387-30303-1 978-1-4939-3711-0.
- [16] J. Ohser y F. Mücklich, *Statistical Analysis of Microstructures in Materials Science*. John Wiley & Sons, Ltd, 2000, Capítulo 3, Estimación de densidad de Kernel, ISBN: 0-471-97486-2.
- [17] M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld y M. Overmars, *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, 3rd. Springer, 2008, Capítulo 1, Envolvente convexa, ISBN: 978-3-540-77973-5.
- [18] C. A. R. Hoare, «Quicksort,» *The Computer Journal*, vol. 5, n.º 1, págs. 10-16, 1962.
- [19] C. P. Mexicano. «Servicio Postal Mexicano.» Consultado el 20 de noviembre de 2023. dirección: <https://www.correosdemexico.gob.mx/>.
- [20] C. B. Barber, D. P. Dobkin y H. Huhdanpaa, «The Quickhull Algorithm for Convex Hulls,» *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, vol. 22, n.º 4, págs. 469-483, 1996. DOI: 10.1145/235815.235821.
- [21] SciPy Developers. «scipy.spatial.ConvexHull — SciPy v1.11.3 Manual.» Último acceso: 23 de noviembre de 2024. dirección: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.spatial.ConvexHull.html>.

- [22] Qhull Project. «Qhull: Quickhull Algorithm for Computing Convex Hulls.» Último acceso: 23 de noviembre de 2024. dirección: <http://www.qhull.org>.